Topologie Algébrique TD 5

18 Novembre 2011

5 Revêtements

Exercice 5.1 (Calcul de π_1 et revêtements) Si on connaît le revêtement universel d'un espace topologique, le calcul du groupe fondamental de cet espace se ramène au calcul du groupe des automorphismes de son revêtement universel.

1. Formuler un énoncé précis pour cette idée, et le démontrer.
2. **(Espace projectif réel)** Rappelons que le *plan projectif réel* peut être défini comme le quotient d'une sphère de dimension 2 par la relation d'équivalence antipodale. Vérifier que le morphisme quotient est un revêtement. En déduire le groupe des automorphisme de ce revêtement et ainsi le groupe fondamental d'un plan projectif réel. Faire la même chose pour un espace projectif réel de dimension quelconque.
3. **(Tore)** Un *tore* est par définition un espace topologique homéomorphe au produit d'un nombre fini de cercle. Quel est le revêtement universel d'un tore ? Calculer le groupe fondamental d'un tore en déterminant le groupe des automorphismes de son revêtement universel.
4. Déterminer le groupe d'isométries de $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ engendré par les isométries $z \mapsto z + i$ et $z \mapsto \bar{z} + 1$.

Exercice 5.2
1. Classifier les revêtements connexes d'un cercle $\mathbb{S}^1$;
2. Classifier les revêtements connexe de deux feuilles d'un bouquet de deux cercles $\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1$. En générale montrer qu'un revêtement connexe de deux feuilles est toujours galoisien.
3. Classifier les revêtements connexe de trois feuilles de l'espace $\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1$. Lesquels sont galoisiens ?
4. Construire le revêtement universel de $\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^1 \bigvee \mathbb{S}^2$.

Exercice 5.3 (Revêtement de graphe et Théorie de groupe) Un *graphe* est par définition un CW-complexe de dimension 1. On pourrait résoudre les problèmes de la théorie de groupes en utilisant la théorie de revêtements. On note F_r un groupe libre de r générateurs.

1. Montrer qu'un revêtement d'un graphe est encore un graphe.
2. Montrer qu'un sous-groupe d'un groupe libre est encore un groupe libre. Et dans le cas d'engendrement fini : soient H un sous-groupe d'indice $d \in \mathbf{N}^+$ de F_n, montrer que H est un groupe libre de $dn - d + 1$ générateurs.
3. Soient $m \geq 2$ un entier. Montrer que F_m peut être réalisé comme un sous-groupe de F_2.

4. Soit F_2 un groupe libre de deux générateurs. Classifier ses sous-groupes d'indice 2, et préciser un système de génératrice pour chacun.
5. Résoudre le même problème pour les sous-groupe d'indice 3 de F_2.
6. Montrer qu'un sous-groupe non-trivial distingué d'indice infinie dans un groupe libre ne peut pas être engendré par un nombre fini de générateurs.

Exercice 5.4 1. Montrer que tout revêtement d'un H-espace est galoisien.

2. Donner un exemple d'un espace topologique à groupe fondamental non-abélien, tel que tout revêtement connexe est galoisien.

Exercice 5.5 (Reconstruction) Soit (X, x) un espace topologique pointé, qui est connexe par arc et semi-localement simplement connexe. On considère la catégorie $\mathfrak{Cov}/X$ des revêtements connexes par arc de X. On a le foncteur de fibre :

$$\begin{array}{rcl} F : \mathfrak{Cov}/X & \to & \mathfrak{Set} \\ (Y \xrightarrow{p} X) & \mapsto & p^{-1}(x) \\ \begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{f} & Y_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ X & = & X \end{array} & \mapsto & p_1^{-1}(x) \to p_2^{-1}(x) \end{array}$$

Montrer que le groupe des automorphismes du foncteur F est exactement le groupe fondamental de X :

$$\mathrm{Aut}(F) \simeq \pi_1(X, x).$$

On a reconstruit le groupe fondamental à partir de la catégorie des revêtements munie d'un foncteur fibre.

Exercice 5.6 (Structures supplémentaires sur revêtements) Si on a un revêtement $\pi : Y \to X$. On peut transporter très souvent une structure supplémentaire de nature locale sur la base X en une structure correspondante sur le revêtement Y. De plus, la structure induite sur Y est unique, caractérisée par la condition que π préserve les structures supplémentaires. Essayer de préciser la structure induite sur Y dans les cas suivants :

1. X est une variété différentielle ;
2. X est une variété complexe ;
3. X est une variété symplectique ;
4. X est une variété riemannienne ;
5. X est un groupe de Lie, voir l'exercice 5.8.

Exercice 5.7 (Holomorphie de relèvements) C'est la suite de l'exercice précédent, on verra que le relèvement souvent respecte la structure supplémentaire de nature locale.

1. Soit X une variété complexe, et $\pi : Y \to X$ est un revêtement. On munit Y de la structure complexe induite (*cf.* l'exercice précédent). Soit $\widetilde{f} : Z \to Y$ une application continue d'une troisième variété complexe Z vers Y, montrer que $\widetilde{f}$ est holomorphe si et seulement si $f := \widetilde{f} \circ \pi$ est holomorphe.
2. Énoncer et montrer les assertions analogues en remplaçant 'complexe' par 'différentielle', 'symplectique', ou 'riemannienne/isométrie locale'.
3. Est-elle correcte l'assertion analogue pour les groupes de Lie ? Sinon, donner des contre-exemples.
4. Soit f une fonction holomorphe définie sur un domaine simplement-connexe Ω. Supposons que 0 n'est pas dans l'image de f, montrer qu'il existe une fonction $g = \log(f)$ holomorphe bien définie sur Ω telle que
$$\exp(g) = f,$$
elle est unique si on fixe son valeur en un point.
5. Sous les même hypothèses, construire $\sqrt[k]{f}$ pour $k \in \mathbf{N}^+$.

Exercice 5.8 (Revêtement de groupes de Lie) Soit G un groupe de Lie connexe avec l'élément neutre e_G. Si on se donne un revêtement connexe $\pi : R \to G$, et on fixe un point $e_R \in \pi^{-1}(e_G)$. On va démontrer qu'il existe une unique structure de groupe de Lie sur R telle que e_R est l'élément neutre de R et que π est un morphisme de groupes de Lie.

1. Rappeler la structure différentielle induite sur R.
2. Soient $\mu_G : G \times G \to G$ et $\iota_G : G \to G$ la loi de multiplication et l'inversion. Pour deux lacets en e_G $\gamma_i : I \to G$, $i = 1, 2$, on note $\gamma_1 * \gamma_2$ le lacet défini par $t \mapsto \mu(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, $t \in I$, et note $\gamma_1 \bullet \gamma_2$ le lacet de concaténation. Montrer que $\gamma_1 \bullet \gamma_2$, $\gamma_2 \bullet \gamma_1$, $\gamma_1 * \gamma_2$, $\gamma_2 * \gamma_1$ sont homotopes relative aux extrémités.
3. Pour un lacet $\gamma : I \to G$ en e_G, on note $\overline{\gamma}$ le lacet défini par $t \mapsto \iota(\gamma(t))$, $t \in I$; et note $\widetilde{\gamma}$ le lacet inverse. Montrer que $\overline{\gamma}$ et $\widetilde{\gamma}$ sont homotopes relative aux extrémités.
4. Déterminer l'image du morphisme sur les groupes fondamentaux induits par l'application composée suivante :
$$R \times R \xrightarrow{\pi \times \pi} G \times G \xrightarrow{\mu_G} G.$$
5. En déduire une application $R \times R \to R$ envoyant (e_R, e_R) vers e_R, on l'appelle μ_R. Vérifier que μ_R est $\mathscr{C}^\infty$.
6. Construire une application $\mathscr{C}^\infty$ $\iota_R : R \to R$ par la même procédure.
7. Vérifier que (R, μ_R, ι_R) est bien un groupe de Lie de l'élément neutre e_R, et π est un morphisme de groupe de Lie .
8. Démontrer l'unicité de la structure de groupe de Lie sur R.
9. Déterminer le groupe des automorphismes de ce revêtement.

Exercice 5.9 (SO(3) et SU(2)) On va voir un exemple explicite de l'exercice précédent. Rappelons que

$$\mathrm{SO}(3) = \{M \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R}) | M^t M = I, \det(M) = 1\},$$

$$\mathrm{SU}(2) = \{M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbf{C}) | \overline{M}^t M = I, \det(M) = 1\}.$$

1. Montrer que le groupe de Lie SO(3) est homéomorphe à la boule fermée de dimension 3 modulo la relation d'équivalence $x \sim -x$ pour tout point x du bord $\mathbb{S}^2$ de la boule.
2. Montrer que le groupe fondamental de SO(3) est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Essayer de donner un générateur.
3. **(Généralités sur les quaternions)** Soit $\mathbb{H}$ la partie de $M_2(\mathbf{C})$ formée des matrices de la forme $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbf{C}$. On note

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, si $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, on note $\overline{q} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $|q| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$. Montrer les propriétés suivantes :
   - $\mathbb{H}$ est une sous-algèbre réelle de $M_2(\mathbf{C})$ de base réelle $1, I, J, K$.
   - $\mathbb{H}$ est l'algèbre réelle définie par les relations suivantes : $I^2 = J^2 = K^2 = -1$, $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$.
   - Pour tout $q \in \mathbb{H}$ on a $q\overline{q} = |q|^2$. En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps non-commutatif.
   - L'application $q \mapsto |q|$ est une norme sur $\mathbb{H}$. La sphère unité de $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $\mathbb{H}^*$ qui s'identifie à SU(2) et aussi la sphère unité $\mathbb{S}^3$.
   - $\mathbf{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{H}$ et c'est son centre.
4. (a) Soit $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbb{H}$ l'application définie par $Q(x, y, z) = xI + yJ + zK$. On appelle son image l'ensemble des quaternions purs. Soit $q \in \mathbb{H}^*$ et u un quaternion pur. Montrer que quq^{-1} est un quaternion pur.

   Définissons $\phi_q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ par $\phi_q(y) = Q^{-1}(qQ(y)q^{-1})$.

   (b) Montrer que pour $\lambda \in \mathbf{R}^*$ on a $\phi_{\lambda q} = \phi_q$ et que $\phi_q \in \mathrm{SO}(3)$. En déduire une applications

$$p : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$$

   Montrer que c'est un morphisme de groupe et un revêtement double. En déduire que $\mathbb{S}^3 \cong \mathrm{SU}(2)$ est un revêtement universel de SO(3).